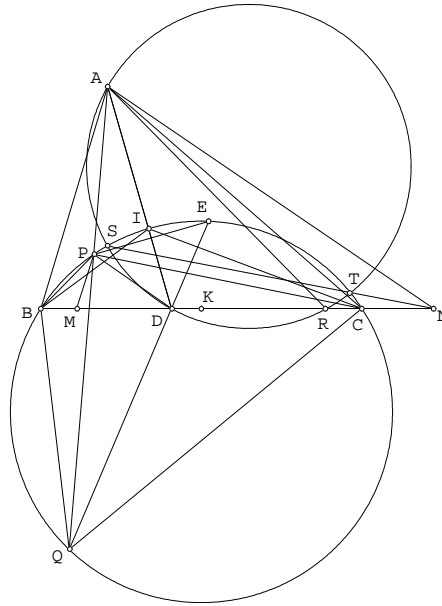


ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM
ĐỀ THI OLYMPIC CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN 2015

Môn thi: TOÁN
Ngày thi thứ nhất

Câu I. (7đ) Nếu $p = 2$ ta có $3^2 + 4^2 = 5^2$ thỏa mãn. Xét $p \geq 3$, giả sử $3^p + 4^p = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$) khi đó p là số lẻ nên $3^p + 4^p : 7$ nên $k : 7$ suy ra $3^p + 4^p$ chia hết cho 49. Ta có $3^p + 4^p = (3 + 4)(3^{p-1} - 3^{p-2}4 + 3^{p-3}4^2 - \dots - 3.4^{p-2} + 4^{p-1}) = 7.A$ với $A \equiv 3^{p-1} - 3^{p-2}(-3) + 3^{p-3}(-3)^2 - \dots - 3.(-3)^{p-2} + (-3)^{p-1}$ nên $A \equiv p.3^{p-1} \pmod{7}$. Do đó $p.3^{p-1} \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow p = 7$, không thỏa mãn vì $3^7 + 4^7 = 7^2.379$ không là số chính phương. Đáp số $p = 2$.

Câu II. (7đ) a) Gọi DQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại E khác Q . Chú ý AI đi qua tâm ngoại tiếp tam giác IBC nên P, E đối xứng qua AD vậy $DP.DQ = DE.DQ = DB.DC$ không đổi.



b) Ta dễ thấy $NB.NC = NS.ST = ND.NR$. Từ đó $\frac{NB}{ND} = \frac{NR}{NC}$ hay $(BD, N) = (RC, N)$ hay $(ND, B) = (NC, R)$. Tương tự $\frac{NC}{ND} = \frac{NR}{NB}$ suy ra $(CD, N) = (RB, N)$ hay $(ND, C) = (NB, R)$. Từ đó $(ND, BC) = \frac{(ND, B)}{(ND, C)} = \frac{(NC, R)}{(NB, R)} = (BC, R)$. Vậy ta có biến đổi $(DN, CB) = (ND, BC) = (BC, R) = (CB, M)$ vậy theo hệ thức Maclaurin mở rộng suy ra $DN.DM = DB.DC = DP.DQ = DM.DQ$. Từ đó $DN = DQ$ nên tam giác DQN cân tại D .

Câu III. (7đ) An có chiến thuật để chắc chắn dành được chiến thắng. Ta chia hình chữ nhật ra thành 671 ô vuông 3×3 và một phần chữ nhật 3×2 . Khi đó, chiến thuật của An là sẽ đặt một hình chữ nhật ngang vào một ô vuông 3×3 chưa bị ai đặt đến khi nào không đặt được nữa. Do mỗi bước Bình chỉ có đặt một hình chữ nhật dọc vào một ô vuông 3×3 (hoặc hình chữ nhật 3×2) nên số ô 3×3 An có thể chiếm được ít nhất là 336. Lưu ý rằng, mỗi khi An chiếm được một ô vuông 3×3 thì Bình không thể đi vào đó. Do đó, An có thể đi được ít nhất $336 \times 3 = 1008$ bước. Do trò chơi kết thúc sau không quá 2015 bước nên An luôn có thể đi chừng nào Bình đi được. Nói một cách khác, An luôn có chiến thuật thắng.